

SULIT



Second Semester Examination
2017/2018 Academic Session

May/June 2018

MSS311 - Modern Algebra
[Aljabar Moden]

Duration : 3 hours
(Masa : 3 jam)

Please check that this examination paper consists of FIVE (5) pages of printed material before you begin the examination.

[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi LIMA (5) muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]

Instructions: Answer **all SIX** (6) questions.

[Arahan: Jawab **semua ENAM** (6) soalan.]

In the event of any discrepancies, the English version shall be used.

[Sekiranya terdapat sebarang percanggahan pada soalan peperiksaan, versi Bahasa Inggeris hendaklah diguna pakai].

...2/-

SULIT

Question 1

A relation R on \mathbb{Z} is defined as xRy if and only if $x^2 + y^2$ is even.

- (a) Prove that R is an equivalence relation.
- (b) Determine its equivalence classes.

[10 marks]

Soalan 1

Suatu hubungan R pada \mathbb{Z} ditakrifkan sebagai xRy jika dan hanya jika $x^2 + y^2$ adalah genap.

- (a) Buktikan bahawa R adalah hubungan kesetaraan.*
- (b) Tentukan kelas kesetaraannya.*

[10 markah]

Question 2

Let x be an element of a group G and suppose x has order 24.

- (a) (i) List all the elements in the subgroup $\langle x^4 \rangle$.
- (ii) What are the generators of the subgroup $\langle x^4 \rangle$?
- (b) (i) If x is the generator for the group G , what is G ? Explain.
- (ii) Give a group H of order 24 and H is not isomorphic to G in (b)(i).
- (c) Based on your answer in (b)(i), construct the subgroup lattice of G .

[20 marks]

Soalan 2

Biar x suatu unsur bagi satu kumpulan G dan andaikan peringkat x adalah 24.

- (a) (i) Senaraikan semua unsur dalam subkumpulan $\langle x^4 \rangle$.
- (ii) Apakah penjana bagi subkumpulan $\langle x^4 \rangle$?
- (b) (i) Jika x adalah penjana bagi kumpulan G , apakah kumpulan G ? Terangkan.
- (ii) Beri satu kumpulan H berperingkat 24 dan H tidak berisomorfik dengan G dalam (b)(i).
- (c) Berdasarkan jawapan anda dalam (b)(i), bina subkumpulan kekisi bagi G .

[20 markah]

Question 3

A dihedral group is the group of symmetries of a regular polygon which includes rotations and reflections. Let D_n refers to the symmetries of n -gon with $2n$ elements.

- (a) Sketch a regular pentagon, D_5 . Using dotted lines, label all the reflection lines.
- (b) List all elements of D_5 and determine their orders.
- (c) Give H , a nontrivial normal subgroup of D_5 .
- (d) What is the factor group D_5/H ?

[20 marks]

Soalan 3

Suatu kumpulan dwihedron adalah kumpulan simetri bagi poligon sekata merangkumi putaran dan pantulan. Biar D_n merujuk kepada simetri bagi n -gon dengan $2n$ unsur.

- (a) Lakar satu pentagon sekata, D_5 . Menggunakan garisan bertitik, label kesemua garis-garis pantulan.
- (b) Senaraikan semua unsur bagi D_5 dan tentukan peringkat mereka.
- (c) Berikan H , suatu subkumpulan normal tak remeh bagi D_5 .
- (d) Apakah kumpulan faktor bagi D_5/H ?

[20 markah]

...4/-

Question 4

Determine if the following statements are true or false. Justify your answer.

- (a) Every subgroup of a cyclic group is a normal subgroup.
- (b) Every element of a cyclic group generates the group.
- (c) $\langle \mathbb{Z}_n, + \rangle$ is a group but $\langle \mathbb{Z}_n, +, \cdot \rangle$ is not a ring.
- (d) The odd permutations in S_n form a group.
- (e) The group \mathbb{Z}_p has no proper nontrivial subgroup if p is a prime number.

[20 marks]

Soalan 4

Tentukan sama ada pernyataan berikut adalah benar atau palsu. Justifikasi jawapan anda.

- (a) Setiap subkumpulan bagi kumpulan kitaran adalah subkumpulan normal.
- (b) Setiap unsur bagi suatu kumpulan kitaran menjana kumpulan tersebut.
- (c) $\langle \mathbb{Z}_n, + \rangle$ adalah suatu kumpulan tetapi $\langle \mathbb{Z}_n, +, \cdot \rangle$ bukan suatu gelanggang.
- (d) Pilihaturn ganjil dalam S_n membentuk suatu kumpulan.
- (e) Kumpulan \mathbb{Z}_p tidak mempunyai subkumpulan tak remeh yang tak wajar jika p adalah suatu nombor perdana.

[20 markah]

Question 5

Let $R = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ be a ring with respect to the addition and multiplication operation.

- (a) Is R commutative?
- (b) Does R have unity?
- (c) Find all units of R . Then determine whether R is a division ring.
- (d) Is R an integral domain? Explain.
- (e) Is R a field? Verify your answer.

[20 marks]

...5/-

Soalan 5

Biar $R = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ suatu gelanggang terhadap operasi penambahan dan pendaraban.

- (a) Adakah R kalis tukar tertib?
- (b) Adakah R mempunyai uniti?
- (c) Dapatkan semua unit bagi R . Kemudian tentukan sama ada R adalah gelanggang pembahagian.
- (d) Adakah R suatu domain integer? Terangkan.
- (e) Adakah R suatu medan? Tentusahkan jawapan anda.

[20 markah]

Question 6

The map $\phi : \mathbb{Z} \rightarrow 2\mathbb{Z}$ is defined by $\phi(x) = 2x$ for $x \in \mathbb{Z}$.

- (a) Show that ϕ is a group isomorphism.
- (b) Is ϕ a ring isomorphism?

[10 marks]

Soalan 6

Pemetaan $\phi : \mathbb{Z} \rightarrow 2\mathbb{Z}$ ditakrifkan sebagai $\phi(x) = 2x$ bagi $x \in \mathbb{Z}$.

- (a) Tunjukkan bahawa ϕ adalah suatu isomorfisma kumpulan.
- (b) Adakah ϕ suatu isomorfisma gelanggang?

[10 markah]